

## Aula 15

### Equações Diferenciais Ordinárias Escalares de 1ª Ordem **Exatas**

Definição: Diz-se que uma equação diferencial ordinária escalar, de primeira ordem

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0,$$

é **exata** se existe  $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$M(t, y) = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad N(t, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

ou seja, se e só se o campo  $(M(t, y), N(t, y))$  é um campo gradiente (ou conservativo). Nesse caso, a solução geral é dada implicitamente por

$$\phi(t, y) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

garantindo existência e unicidade local, na vizinhança duma condição inicial  $y(t_0) = y_0$ , pelo teorema da função implícita, se  $\frac{\partial \phi}{\partial y}(t_0, y_0) = N(t_0, y_0) \neq 0$ .

Proposição: Considere-se uma equação diferencial ordinária escalar, de primeira ordem

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0,$$

com  $M, N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1(\Omega)$ . Então:

- é condição necessária para ser exata que o campo  $(M(t, y), N(t, y))$  seja fechado em  $\Omega$ , ou seja, que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

- é condição suficiente para ser exata que o domínio  $\Omega$  seja simplesmente conexo e o campo  $(M(t, y), N(t, y))$  seja fechado em  $\Omega$ .

## Equações Diferenciais Ordinárias Escalares de 1ª Ordem **Redutíveis a Exatas**

Definição: Diz-se que uma equação diferencial ordinária escalar, de primeira ordem

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0,$$

com  $M, N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1(\Omega)$  num conjunto simplesmente conexo  $\Omega$  é **redutível a exata** se existe  $\mu : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} N + \mu \frac{\partial N}{\partial t},$$

ou seja, se e só se o campo  $(\mu(t, y)M(t, y), \mu(t, y)N(t, y))$  é um campo gradiente (ou conservativo).

Quando tal função  $\mu$  existe, denomina-se **fator integrante**.

Proposição: Dada uma equação diferencial ordinária escalar, de primeira ordem

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0,$$

com  $M, N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1(\Omega)$  num conjunto simplesmente conexo  $\Omega$  é **reduzível a exata** com

- Fator integrante  $\mu = \mu(y)$  se  $(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y})/M$  é apenas função de  $y$ . Nesse caso, obtém-se o fator integrante pela solução da EDO (em  $y$ )

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \mu.$$

- Fator integrante  $\mu = \mu(t)$  se  $(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t})/N$  é apenas função de  $t$ . Nesse caso, obtém-se o fator integrante pela solução da EDO (em  $t$ )

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \mu.$$